УДК 510.652

ПРИМЕНЕНИЕ ОПЕРАТОРА ТРАНЗИТИВНОГО ЗАМЫКАНИЯ ДЛЯ ФОРМУЛ С ОДНОЙ ФУНКЦИЕЙ СЛЕДОВАНИЯ И ПРЕДИКАТАМИ ДЕЛИМОСТИ[1]

Золотов А.С.
Кафедра информатики

Поступила в редакцию 10.02.2013, после переработки 15.02.2013.

В данной работе рассматривается вопрос о применении оператора транзитивного замыкания для формул с одной функцией следования и предикатами делимости. Показано, что если допусткать оператор транзитивного замыкания хотя бы по двум парам переменных, теория становится неразрешимой. Для формул, содержащих транзитивное замыкание по одной паре переменных, построены эквивалентные аналоги, не содержащие оператора транзитивного замыкания.

We investigate transitive closure operator on formulas with successor function and divisibility predicates. We prove that transitive closure operator on two or more pairs of vaiables makes theory undecidable. We build equivalent analog without transitive closure operator for fomulas containing only transitive closure operator on one pair of variables.

Ключевые слова: разрешимость, транзитивное замыкание.
Keywords: decidability, transitive closure.

Введение

В общем случае проблема разрешимости — это вопрос, сформулированный в рамках формальной системы и требующий положительного или отрицательного ответа, возможно, в зависимости от предложенных входных данных. Задача о разрешимости теории сводится к поиску алгоритма, определяющего по формуле, принадлежит ли она данной теории или нет. Исследование разрешимости арифметических теорий — одна из центральных задач математической логики. Несмотря на то, что теория алгоритмов является достаточно молодой наукой, к настоящему времени было получено множество результатов, связанных с разрешимостью и неразрешимостью математических теорий.

Одни из первых примеров доказательства неразрешимости теорий найдены Черчем (см. [5], [6], [7]) и Россером (см. [10]). Последним была доказана неразрешимость арифметики натуральных чисел. После доказательства неразрешимости арифметики появилось множество результатов, связанных с разрешимостью

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, гранты 13-01-00382 и 13-01-00643.

различных теорий. В 1929 году Пресбургером было доказано, что арифметика без умножения разрешима (см. [5],[9]). В доказательстве этого факта был использован метод эффективной элиминации кванторов: по заданной формуле, эффективно строится новая, эквивалентная исходной формула, не содержащая кванторов. Таким образом можно перейти к рассмотрению бескванторных формул, истинность которых устанавливается алгоритмически. Также был получен ряд результатов, на настоящий момент уже считающихся классическими. Теория вещественно замкнутых полей разрешима (см. [2],[11]), теория булевых алгебр разрешима (см [12]). В [1] приведен целый ряд результатов, принадлежащих отечественным математикам, о разрешимости и неразрешимости теорий.

В работах [3] и [4] рассматриваются обогащения арифметики Пресбургера функциями, согласованными со сложением, а также редкими предикатами. Доказано, что оба варианта являются разрешимыми. Активное исследование оператора транзитивного замыкания и его свойств началось в работе [8].

В данной работе рассматривается вопрос о разрешимости теории, содержащей функцию следования, оператор транзитивного замыкания и предикаты делимости. Целью работы является выяснение условий, при которых рассматриваемая теория является разрешимой. В случае, когда эти условия выполнены, строится процедура, позволяющая для формул различной сложности построить эквивалентные формулы, уже не содержащие оператора транзитивного замыкания.

1. Основные определения

Определение 1. *Будем использовать термин «язык» для обозначения множества нелогических символов. Логические символы в данной работе рассматриваются следующие:* $\neg, \vee, \wedge, \exists, \forall, =, (,), T$ *(с нижними индексами)*

Определение 2. *Язык L содержит:*

- *счетно–бесконечное множество переменных, обозначаются латинскими буквами, возможно, с индексами;*
- *одноместный функциональный символ s;*
- *символ 0.*

Определим язык L', являющийся расширением языка L и содержащий помимо символов языка L также

- *счетно–бесконечное множество унарных предикатных символов $D_i, i = 1, 2, \dots$*
- *двухместный предикатный символ $<$.*

Будем считать, что формулы строятся обычным образом за исключением оператора транзитивного замыкания.

Определение 3. *Пусть $\psi(\overline{x}, \overline{y})$ — формула, при этом наборы переменных $\overline{x}, \overline{y}$ совпадают по количеству элементов, не пересекаются и состоят из переменных, свободно входящих в ψ.*

Тогда $T_{\overline{x},\overline{y}}(\psi(\overline{x}, \overline{y}))$ — также формула, называемая транзитивным замыканием формулы $\psi(\overline{x}, \overline{y})$ по переменным $\overline{x}, \overline{y}$.

Замечание 1. Далее в формулах могут встречаться скобки, отличные от круглых, которые призваны сделать формулы более простыми для чтения.

Рассматривается следующая интерпретация I. Ее областью являются целые числа, то есть каждой переменной ставится в соответствие некоторое целое число. Здесь и далее в работе $I(x)$ — элемент интерпретации, приписываемый переменной x. I приписывает символу 0 нуль, символу s — функцию прибавления единицы. Также I дает определяет истинность бесконечно многих одноместных предикатных символов $D_2, D_3, \ldots, D_n, \ldots$: I предписывает, что $D_n(x)$ истинно тогда и только тогда, когда n делит $I(x)$. Также I предписывает, что $x < y$ должно быть истинно тогда и только тогда, когда $I(x)$ меньше $I(y)$, $x = y$ должно быть истинно тогда и только тогда, когда $I(x)$ равно $I(y)$.

Определение 4. *Считаем $T_{\overline{x},\overline{y}}\left(\psi\left(\overline{x},\overline{y}\right)\right)$ истинным, если $I(\overline{x}) = I(\overline{y})$ или если существует последовательность наборов элементов области интерпретации $\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n$, такая, что выполнено*

$$\psi(\overline{a}_1, \overline{a}_2) \wedge \psi(\overline{a}_2, \overline{a}_3) \wedge \cdots \wedge \psi(\overline{a}_{n-1}, \overline{a}_n) \wedge I(\overline{x}) = \overline{a}_1 \wedge I(\overline{y}) = \overline{a}_n.$$

Замечание 2. Предикат $D_1(x)$ истинен для любого x, так как всякое число делится на 1 без остатка.

Определение 5. *Совокупность последовательности $\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n$ и формулы*

$$\psi(\overline{x}_1, \overline{x}_2) \wedge \psi(\overline{x}_2, \overline{x}_3) \wedge \cdots \wedge \psi(\overline{x}_{n-1}, \overline{x}_n) \wedge \overline{x} = \overline{x}_1 \wedge \overline{y} = \overline{x}_n$$

таких, что выполнено

$$\psi(\overline{a}_1, \overline{a}_2) \wedge \psi(\overline{a}_2, \overline{a}_3) \wedge \cdots \wedge \psi(\overline{a}_{n-1}, \overline{a}_n) \wedge I(\overline{x}) = \overline{a}_1 \wedge I(\overline{y}) = \overline{a}_n$$

будем называть цепочкой от $\overline{x}$ до $\overline{y}$ со звеном ψ. Будем называть $a_1, \ldots, a_n$ узлами цепочки. Также в таком случае будем говорить, что формула ψ входит в цепочку. Будем говорить, что такая цепочка подтверждает истинность $T_{\overline{x},\overline{y}}\left(\psi\left(\overline{x},\overline{y}\right)\right)$.

Обозначим с помощью Th теорию, представляющую собой множество истинных в интерпретации I формул на описанном языке. Мы будем изучать разрешимость теории Th с оператором транзитивного замыкания.

Предложение 1. *Транзитивное замыкание $T_{\overline{x},\overline{y}}\left(\psi\left(\overline{x},\overline{y}\right)\right)$ истинно тогда и только тогда, когда существует цепочка от $\overline{x}$ до $\overline{y}$ с шагом (звеном) $\psi\left(\overline{x},\overline{y}\right)$, подтверждающая его истинность.*

Определение 6. *Будем обозначать через $s^k(x)$ многократное применение s: $\underbrace{s(s(\ldots s}_{k\ \text{раз}}(x)\ldots)$.*

Замечание 3. В формулах вида $x = s^k(y)$ будем допускать отрицательные k. Так, формула вида $x = s^{-k}(y)$, где $k > 0$, является обозначением для $s^k(x) = y$.

2. Неразрешимый случай

Сначала рассмотрим условия, при которых теория не является разрешимой. Покажем, что если транзитивное замыкание производится хотя бы по двум парам переменных, то в результате получается неразрешимая теория. Для этого докажем следующие утверждения.

Замечание 4. Эквивалентность понимается в смысле эквивалентности в теории T.

Теорема 1. *При помощи оператора транзитивного замыкания по двум парам переменных можно выразить сложение через операцию s — прибавление единицы.*

Доказательство. Покажем, что $x = y + u$ тогда и только тогда, когда истинна формула $\exists v(T_{(x,u),(y,v)}((x = s(y) \wedge u = s(v)) \wedge v = 0)$

Рассмотрим формулу $\psi \equiv (x = s(y) \wedge u = s(v))$. Рассмотрим транзитивное замыкание этой формулы по x, y и u, v. Согласно определению, $T_{(x,u),(y,v)}(\psi)$ истинно тогда и только тогда, когда истинна формула, утверждающая существование узлов цепочки, подтверждающей истинность оператора транзитивного замыкания(для некоторого n). Тогда значения переменных связаны следующим соотношением: $I(x) - I(y) = I(u) - I(v)$. В таком случае, взяв $I(v) = 0$, получим $I(x) - I(y) = I(u)$, то есть $x = y + u$ истинна.

В другую сторону, пусть действительно $x = y+u$. Рассмотрим $\exists v(T_{(x,u),(y,v)}(\psi) \wedge v = 0)$. Пусть $I(x) = a, I(u) = b, I(y) = c, I(v) = 0$, тогда $I(x) = I(y) + I(u)$, то есть $a = c + b$. В качестве узлов цепочки, подтверждающей танзитивное замыкание, годятся пары $(a, b), (a - 1, b - 1), \ldots, (a - b, 0)$, причем $c = a - b$. □

Теорема 2. *При помощи оператора транзитивного замыкания по двум парам переменных можно выразить умножение через сложение.*

Доказательство. Рассмотрим формулу $\exists y \exists v(T_{(x,u),(y,v)}((x = z + y \wedge u = s(v))) \wedge (v = 0) \wedge (y = 0))$. Доказательство эквивалентности данной формулы формуле $x = zu$ основывается на том, что данной транзитивное замыкание истинно тогда и только тогда, когда $I(x) - I(y) = I(z)(I(u) - I(v))$. Взяв $I(y) = 0$, $I(v) = 0$, получим $I(x) = I(z)I(u)$. Доказательство в обратную сторону строится аналогично случаю в теореме 1. □

Показано, что в данной теории выражаются одновременно сложение и умножение, значит, полученная система неразрешима, так как неразрешима арифметика со сложением и умножением(см. [5]).

3. Разрешимый случай

Рассмотрим случай, когда транзитивное замыкание берется только одной паре переменных.

Замечание 5. Поскольку теория следования допускает элиминацию кванторов (см. [5]), всюду далее считаем, что имеем дело с бескванторными формулами.

3.1 Формулы с равенствами

Теорема 3. *Формула* $T_{x,y}(x = s^k(y))$ *эквивалентна*

$$(y \le x) \wedge \left(\bigvee_{i=0}^{k-1} D_k(s^i(x)) \wedge D_k(s^i(y)) \right)$$

при $k > 0$.

Доказательство. Рассмотрим формулу $T_{x,y}(x = s^k(y))$.Она истинна тогда и только тогда, когда существуют такие числа $a_1, \ldots, a_n$, что

$$a_1 = a_2 + k \wedge a_2 = a_3 + k \wedge \cdots \wedge a_{n-1} = a_n + k \wedge I(x) = a_1 \wedge I(y) = a_n.$$

Выразим a_1 через a_n, получим, что $a_1 = a_n + k(n-1)$. Тогда для любой интерпретации переменных x, y должно быть выполнено равенство остатков от деления на k. И, очевидно, в таком случае, $I(y) \le I(x)$. Таким образом, условие можно записать в виде $\Phi(x, y) \equiv (y \le x) \wedge \left(\bigvee_{i=0}^{k-1} (D_k(s^i(x)) \wedge D_k(s^i(y)) \right)$

Покажем, что в обратную сторону следование также выполнено. Пусть $\Phi(x, y)$ истинна. Тогда истинно $y \le x$ и истинен один из элементов дизъюнкции (очевидно, что одновременно два элемента истинными быть не могут).

Пусть истинно $y \le x \wedge \big(D_k(s^i(x)) \wedge D_k(s^i(y))\big)$ для некоторого $0 \le i \le k-1$. Тогда $I(x)+i = km_1, I(y)+i = km_2$, причем, $m_2 \le m_1$ в силу того, что $I(y) \le I(x)$. Пусть $m_2 - m_1 = m$. Тогда в качестве узлов цепочки, подтверждающей истинность оператора транзитивного замыкания, годятся точки $a_1 = I(x), a_2 = a_1 - k, a_3 = a_1 - 2k, \ldots, a_{m+1} = a_1 - mk = I(y)$. Это означает, что истинно транзитивное замыкание $T_{x,y}(x = s^k(y))$. □

Замечание 6. При $k = 1$ мы получаем просто $y \le x$, так как дизъюнкция будет состоять из одного единственного истинного члена $D_1(x) \wedge D_1(y)$, поэтому ее можно опустить.

Теперь покажем, как следует поступить с формулой, содержащей дизъюнкцию предложений из предыдущей теоремы. В частности, покажем, как перейти к формуле, содержащей только более короткие дизъюнкции.

Теорема 4. *Формула* $T_{x,y}\left(x = s^{k_1}(y) \vee \psi(x,y)\right)$ *эквивалентна*

$$\underbrace{T_{x,y}(\psi(x,y))}_{(1)} \vee \underbrace{T_{x,y}\left(x = s^{k_1}(y)\right)}_{(2)} \vee \underbrace{\exists z \left(T_{x,z}(x = s^{k_1}(z)) \wedge T_{z,y}(\psi(z,y))\right)}_{(3)},$$

где $\psi(x,y) \equiv (x = s^{k_2}(y) \vee \cdots \vee x = s^{k_n}(y))$

Доказательство. Пусть $T_{x,y}\left(x = s^{k_1}(y) \vee \psi(x,y)\right)$ истинно. Это означает, что существует соответствующая цепочка, подтверждающая истинность оператора транзитивного замыкания. Можно считать, что в дизъюнкции $(x = s^{k_1}(y) \vee \cdots \vee x = s^{k_n}(y))$ все $k_1, \ldots k_n$ разные. В таком случае, если дизъюнкция истинна, то истинен ровно один ее член. Перепишем формулу в цепочке так, чтобы вместо всей дизъюнкции остался только истинный член.

Транзитивное замыкание истинно на x, y, тогда и только тогда, когда $I(x) = m_1k_1+m_2k_2+\cdots+m_nk_n+I(y)$ для некоторых чисел $m_1, \ldots, m_n$. Но в таком случае, существует число c, такое что $c = I(x) - m_1k_1$, его и рассмотрим в качестве $I(z)$. Тогда истинно $T_{x,z}(x = s^{k_1}(z))$, и $I(z) = m_2k_2+\cdots+m_nk_n+I(y)$. В силу последнего равенства, формула $T_{z,y}(\psi(z, y))$ истинна.

Таким образом, если в цепочке нет ни одного вхождения формулы вида $x = s^k(y)$, то эта цепочка подтверждает истинность оператора транзитивного замыкания дизъюнкции, этой формулы не содержащей, то есть истинно (1). Если формула цепочки целиком состоит только из формул вида $x = s^k(y)$, то будет истинна формула (2). В противном случае цепочка содержит хотя бы одно вхождение $x = s^k(y)$ и хотя бы одно вхождение формулы, отличной от нее, значит, как показано выше, истинно (3). Следовательно, будет истинной и дизъюнкция формул $(1) \vee (2) \vee (3)$.

В обратную сторону доказательство аналогично. Если истинна формула (1), то $I(x) = m_2k_2+\cdots+m_nk_n+I(y) = 0k_1+m_2k_2+\cdots+m_nk_n+I(y)$, что свидетельствует об истинности $T_{x,y}\left(x = s^{k_1}(y) \vee \psi(x, y)\right)$.

Если истинна формула (2), то $I(x) = m_1k_1+I(y) = m_1k_1+0k_2+\cdots+0k_n+I(y)$, тогда истинна формула $T_{x,y}\left(x = s^{k_1}(y) \vee \psi(x, y)\right)$.

Если же истинно (3), то $I(x) = m_1k_1 + I(z), I(z) = m_2k_2 + \cdots + m_nk_n + I(y)$. Из этого следует, что $I(x) = m_1k_1 + m_2k_2 + \cdots + m_nk_n + I(y)$ значит, истинно $T_{x,y}\left(x = s^{k_1}(y) \vee \psi(x, y)\right)$. □

Замечание 7. В полученной формуле под транзитивным замыканием стоит дизъюнкция того же вида, что и в условиях теоремы, но с меньшим количеством членов.

Лемма 1. *Пусть формула ψ не содержит вхождений переменных x, y. Тогда формула $T_{x,y}\left((\phi_1 \wedge \psi) \vee \bigvee_{i=2}^{N} \phi_i\right)$ эквивалентна формуле*

$$\left(\psi \wedge T_{x,y}\left(\bigvee_{i=1}^{N} \phi_i\right)\right) \vee \left(\neg\psi \wedge T_{x,y}\left(\bigvee_{i=2}^{N} \phi_i\right)\right).$$

Доказательство. Действительно, заметим, что истинность ψ не зависит от значений x, y. Тогда если ψ ложно, то в цепочке, подтверждающей истинность исходной формулы, не может быть вхождений ϕ_1. Если же ψ истинна, то такое вхождение возможно. □

Теперь покажем, как раскрыть транзитивное замыкание в более общем случае. Приведем формулу под транзитивным замыканием к ДНФ. Вынесем из-под оператора транзитивного замыкания элементарные конъюнкции, не содержащие в себе переменных, по которым берется транзитивное замыкание.

Определение 7. *В дизъюнктивной нормальной форме будем называть две переменных x, y связанными равенством, если в этой ДНФ существует элементарная конъюнкция, содержащая формулу вида $x = s^m(y)$.*

Всюду далее будем полагать, что транзитивное замыкание берется по переменным x, y. Тогда, если в формуле нет ни одной переменной, связанной равенством с x или y и отличной от них самих, то получаем случай, описанный в предыдущей теореме. В противном же случае покажем, как уменьшить количество связанных равенством переменных в формуле.

Теорема 5. *Транзитивное замыкание $T_{x,y}(\phi)$, где ϕ приведена в ДНФ, эквивалентно формуле, где под каждым транзитивным замыканием стоит формула, содержащая меньшее количество переменных, связанных равенством с x, y.*

Доказательство. Можно считать, что в каждой элементарной коньюнкции есть только одна переменная, связанная с x. Действительно, предположим, что их хотя бы две, то есть коньюнкция имеет вид $x = s^k(y) \wedge x = s^l(z) \wedge x = s^m(u)$. Но в таком случае ее можно переписать как $x = s^k(y) \wedge x = s^l(z) \wedge s^l(z) = s^m(u)$, таким образом устранив связь x и u.

Предположим, что истинно транзитивное замыкание вида

$$T_{x,y}\left((x = s^{k_1}(y) \wedge x = s^l(z)) \vee \psi(x, y)\right),$$

где ψ — формула в ДНФ на языке L. Это означает, что существует цепочка, подтверждающая его истинность. Аналогично приему, примененному в предыдущем доказательстве, вместо всей формулы будем писать в цепочке лишь истинную ее часть.

Рассмотрим формулу

$$T_{x,y}(\psi(x, y)) \vee \exists u \exists v \left((T_{x,u}(\psi(x, u))) \wedge (u = s^l(z)) \wedge (u = s^{k_1}(v)) \wedge (T_{v,y}(\psi(v, y)))\right)$$

и покажем ее эквивалентность исходной формуле.

Пусть истинна исходная формула. Тогда если в цепочке нет вхождений $\phi(x, z) \equiv (x = s^{k_1}(y) \wedge x = s^l(z))$, то подобно случаю, описанному в предыдущем доказательстве, ϕ можно исключить. В противном случае, это возможно лишь при известном значении $I(x)$, а именно $I(x) = I(s^l(z))$. При этом, если в цепочке есть несколько вхождений ϕ, то их можно заменить на одно лишь вхождение. Оставим все узлы до первого вхождения ϕ, а также перепишем первое вхождение, затем, перепишем все узлы, шедшие после последнего вхождения ϕ, соответствующим образом скорректировав индексы. Полученная цепочка останется истинной, так как после последнего вхождения ϕ значение x было ровно то же, что и после первого. Однако в полученной цепочке вхождение ϕ будет единственным.

В обратную сторону, пусть истинна построенная нами формула. Если истинно $T_{x,y}(\psi(x, y))$, то истинно и исходное транзитивное замыкание. Если же верна другая часть дизъюнкции, то построим цепочку C, состоящую из цепочки от x до u, формулы $(u = s^l(z)) \wedge (u = s^{k_1}(v))$ и цепочки от v до y. Заметим, что C годится для доказательства истинности исходного оператора транзитивного замыкания.

Остается только заметить, что в формуле ψ переменных, связанных равенством с теми, по которым берется транзитивное замыкание, меньше. $\square$

Замечание 8. Последовательно применяя описанную процедуру замены, можно привести формулы под транзитивным замыканием к виду $x = s^{k_1}(y) \vee x = s^{k_2}(y) \vee \cdots \vee x = s^{k_n}(y)$.

Таким образом, если формула на языке L не содержит вложенных транзитивных замыканий, то процедура обработки ее такова

- для каждой формулы под транзитивным замыканием строим ее бескванторный эквивалент (см. [5]);
- формулы под каждым транзитивным замыканием приводим к ДНФ;
- выносим из-под оператора транзитивного замыкание те члены, которые не содержат переменных, связанных с x, y;
- последовательно уменьшаем количество связанных равенством переменных указанным выше образом;
- последовательно уменьшаем количество элементарных конъюнкций в каждой из формул под транзитивным замыканием;
- для случая, когда под транзитивным замыканием стоит коньюнкция вида $x = s^k(y) \wedge x = s^l(y), k \neq l$, заменяем ее на ложную формулу $0 = s(0)$, так как так описанное соотношение невыполнимо;
- иначе заменяем формулу вида $T_{x,y}(x = s^k(y))$ на формулу вида $(y \leq x) \wedge \left(\bigvee\limits_{i=0}^{k-1} (D_k(s^i(x)) \wedge D_k(s^i(y))\right)$;

В результате получим формулу на языке L', для нее истинность устанавливается согласно [5].

3.2 Предикаты делимости

Рассматривается вопрос о разрешающей процедуре для формулы языка L', содержащей транзитивное замыкание. Напомним некоторые свойства делимости.

1. $D_m(x) \wedge D_n(x)$ выполнено тогда и только тогда, когда $D_p(x)$,
2. Пусть $p = k'k$. Тогда $D_k(s^m(x))$ эквивалентно $\bigvee\limits_{i=0}^{k'} D_p(s^{m+ik}(x))$, полагается, что $0 \leq m \leq k$

Следствие 1. *Для всякого k*

$$\bigwedge_{i=1}^{p} D_{m_i}(s^k(x)) \iff D_r(s^k(x)), r = HOK(m_1, \ldots, m_p).$$

Следствие 2. *Для формулы вида*

$$\bigvee_{i=1}^{N} x = s^{k_i}(y) \wedge \Psi_{i1}(x) \wedge \Psi_{i2}(y),$$

где

$$\Psi_{i1}(x) \equiv \bigwedge_{j=1}^{r_i} D_{u_{ij}}(s^{m_{ij}}(x)); \quad \Psi_{i2}(y) \equiv \bigwedge_{j=1}^{d_i} D_{l_{ij}}(s^{n_{ij}}(y))$$

существует эквивалентная формула вида $\bigvee_{i=1}^{N'} x = s^{k_i'} \wedge D_p(s^{f_i}(x))$.

Здесь $p = \text{НОК}(\{u_i, i = \overline{1,N}\} \cup \{l_i, i = \overline{1,N}\})$, $u_i = \text{НОК}\{u_{ij}, j = \overline{1,r_i}\}$, $l_i = \text{НОК}\{l_{ij}, j = \overline{1,d_i}\}$

Доказательство. При помощи результата следствия 1 приводим формулы Ψ_{i1} и Ψ_{i2} к виду $D_{u_i}(x)$ и $D_{l_i}(y)$ соответственно. Затем при помощи второго свойства приводим все ограничения делимости к виду делимости на p, после в ограничениях делимости выполняем замену: выразим y через x и приводим полученную формулу к ДНФ. Заметим, что для некоторого x может существовать единственный остаток от деления x на p, поэтому те элементарные конъюнкции, где присутствуют несколько различных ограничений делимости, являются тождественно ложными, из дизъюнкции их можно исключить. Останутся только те элементарные конъюнкции, которые имеют вид, указанный в данном следствии. □

Лемма 2.

$$x < s^k(y) \wedge x = s^l(y) \iff x = s^l(y) \wedge l < k$$

$$x < s^k(y) \wedge y = s^l(x) \iff y = s^l(x) \wedge s^k(l) > 0$$

Доказательство. $x < s^k(y) \wedge x = s^l(y)$ означает $x < y + k$ и $x = y + l$, что, в свою очередь, означает, что $y + l < y + k$, то есть $l < k$. В свою очередь $x = s^l(y) \wedge l < k$ означает $x = y + l$ и $l < k$, следовательно $y + l < y + k$, следовательно $x < y + k$. Вторая эквивалентность доказывается аналогично. □

Теорема 6. *Для формулы* $T_{x,y}(\chi)$, *где* χ *имеет вид* $x = s^k(y) \wedge D_p(s^m(x))$, *существует эквивалентная формула, не содержащая оператора транзитивного замыкания.*

Доказательство. Здесь полагается, что $k > 0$. Для случая $k < 0$ доказательство аналогично с точностью до знака неравенства. Рассмотрим формулу χ' вида

$$\chi(x,y) \vee \left(\underbrace{y \le x \wedge \bigvee_{i=0}^{k-1} \left(D_k(s^i(x)) \wedge D_k(s^i(y)\right)}_{(1)} \wedge D_p(s^m(x)) \wedge D_p(k) \right)$$

и докажем эквивалентность этой формулы и $T_{x,y}(\chi)$.

Пусть истинна χ'. Если при этом истинна $\chi(x,y)$, то существует цепочка, которая годится в качестве цепочки, подтверждающей истинность $T_{x,y}(\chi)$, ее узлами будут $I(x)$ и $I(x) - k$.

Пусть теперь истинна правая часть дизъюнкции. Тогда в силу истинности (1) существует последовательность $a_1, \ldots, a_n$ такая, что $a_1 = I(x)$,$a_i = a_{i+1} + k$, $a_n = I(y)$. Покажем, что для каждой пары (a_i, a_{i+1}) верно $\chi(a_i, a_{i+1})$ индукцией по i.

Базис. $i = 1$, $a_1 = I(x) = a_2 + k$. Из истинности $D_p(s^m(a_1))$ и $I(x) = a_2 + k$ следует истинность $\chi(a_1, a_2)$.

Шаг. Пусть для всех $i < n$ доказано, докажем для $i = n$. По индукционному предположению, $\chi(a_{n-1}, a_n)$ истинна, значит, $D_p(s^m(a_{n-1}))$, а поскольку $D_p(k)$, то и $D_p(s^m(a_{n-1}))$. При этом $a_n = a_{n+1} + k$, то есть истинна $\chi(a_n, a_{n+1})$. Таким образом, существует цепочка, подтверждающая истинность $T_{x,y}(\chi)$.

В обратную сторону, пусть истинна $T_{x,y}(\chi)$. Пусть соответствующая цепочка имеет два узла, тогда истинна $\chi(x,y)$, такая цепочка годится в качестве подтверждающей истинность $T_{x,y}(\chi)$, ее узлами будут $I(x)$ и $I(x)-k$.

Пусть теперь цепочка имеет 2 звена или более. Докажем эквивалентность индукцией по длине цепочки.

Базис. Пусть цепочка имеет два звена, то есть имеет место

$$\chi(a_1,a_2)\wedge\chi(a_2,a_3)\wedge I(x)=a_1\wedge I(y)=a_3.$$

Тогда

$$a_1=a_2+k\wedge D_p(s^m(a_1))\wedge a_2=a_3+k\wedge D_p(s^m(a_2))\wedge I(x)=a_1\wedge I(y)=a_3$$

истинна. Отсюда следует истинность (1).

Заметим, что истинно $D_p(s^m(a_1))$ и $D_p(s^m(a_2))$, то есть истинно $D_p(s^{m+k}(a_2))$ и $D_p(s^m(a_2))$. Значит, $a_2+m=a_2'p$ и $a_2+m+k=a_2''p$ для некоторых a_2' и a_2'', то есть $k=p(a_2''-a_2')$, что означает истинность $D_p(k)$. Таким образом, истинна левая часть дизъюнкции, входящей в χ', значит, истинна χ'.

Шаг. Пусть для всех цепочек длины, меньшей n, утверждение доказано. Рассмотрим цепочку длины n такую, что

$$\chi(a_1,a_2)\wedge\cdots\wedge\chi(a_{n-2},a_{n-1})\wedge\chi(a_{n-1},a_n)\wedge I(x)=a_1\wedge I(y)=a_n.$$

По индукционному предположению

$$a_{n-1}\le I(x)\wedge D_p(s^m(a_1))\wedge D_p(k)\wedge\bigvee_{i=0}^{k-1}\left(D_k(s^i(a_1))\wedge D_k(s^i(a_{n-1}))\right).$$

В силу того, что $a_{n-1}=a_n+k$, получаем, что выполнено

$$a_n\le a_1\wedge D_p(s^m(a_1))\wedge D_p(k)\wedge\bigvee_{i=0}^{k-1}\left(D_k(s^i(a_1))\wedge D_k(s^i(a_n))\right).$$

В свою очередь, это означает истинность χ'. □

Введем ряд обозначений, необходимых для дальнейшего изложения.

Замечание 9. В силу сказанного выше считаем, что под транзитивным замыканием стоит формула вида $\bigvee\limits_{i=1}^{N} x=s^{k_i}(y)\wedge D_p(s^{m_i}(x))$

Определение 8. *Определим следующие константы:*

$$K=\max\{|k_i|,i=\overline{1,N}\},\quad L=p\,HOK\{d:d\le K\},\quad L'=pK$$

Определение 9. *Рассмотрим $T_{x,y}(\Phi(x,y))$, пусть эта формула истинна. Рассмотрим некоторую цепочку, подтверждающую эту истинность, а именно — ее узлы $a_1,\ldots,a_n$. Все они имеют некоторые остатки от деления на L. При помощи $T^m_{x,y}(\Phi(x,y))$ обозначим следующее условие: истинно $T_{x,y}(\Phi(x,y))$ и существует цепочка, потверждающая истинность $T_{x,y}(\Phi(x,y))$ такая, что ее узлы $a_1,\ldots,a_n$ имеют ровно m различных остатков от деления на L, которые повторяются.*

Замечание 10. Далее рассматриваются цепочки без циклов, то есть такие, в которых нет равных узлов, имеющих разные номера в последовательности. Действительно, если есть цепочка с циклом, то ее можно упростить, убрав всю часть между повторяющимися узлами.

Отметим тривиальную эквиватентность

Предложение 2. *$T_{x,y}(\Phi(x,y))$ эквивалентно $\bigvee\limits_{m=0}^{L} T^m_{x,y}(\Phi(x,y))$*

Проведем такое преобразование рассматриваемой формулы, получим формулу

$$\bigvee_{m=0}^{L} T^m_{x,y}\left(\bigvee_{i=1}^{N} x = s^{k_i}(y) \wedge D_p(s^{m_i}(x))\right).$$

Рассмотрим случай, когда знаки всех k_i совпадают.

Теорема 7. *Для всякого $0 \le r \le L$ для условия вида*

$$T^r_{x,y}\left(\bigvee_{i=1}^{N} x = s^{k_i}(y) \wedge D_p(s^{m_i}(x))\right),$$

где все k_i имеют один и тот же знак, существует эквивалентная формула, не содержащая оператора транзитивного замыкания.

Доказательство. Рассмотрим $T^r_{x,y}\left(\bigvee\limits_{i=1}^{N} x = s^{k_i}(y) \wedge D_p(s^{m_i}(x))\right)$ для некоторого $0 \le r \le L$, и индукцией по r построим эквивалентные формулы.

Обозначим $\Psi(x,y) \equiv \left(\bigvee\limits_{i=1}^{N} x = s^{k_i}(y) \wedge D_p(s^{m_i}(x))\right)$

Базис. Пусть $r = 0$. Предположим, что формула $T^0_{x,y}(\Psi(x,y))$ истинна, и рассмотрим цепочку, подтверждающую ее истинность. Так как $r = 0$, повторов остатков в такой цепочке нет, значит, все $a_1, \ldots, a_n$ имеют попарно различные остатки от деления на L. Тогда $n \le L$, так как в противном случае, непременно бы бы повтор (различных остатков всего L). Это означает, что такая цепочка не может иметь больше $L-1$ звена. Поскольку различных звеньев конечное число, то цепочек длины с количеством звеньев не более $L-1$ также конечное число. Рассмотрим цепочки с количеством звеньев j и занумеруем как-либо все такие цепочки от x до y, пусть таких цепочек всего n_j.

По цепочке C_{ij} с количеством звеньев j, имеющей номер i, построим формулу. Рассмотрим формулу в этой цепочке, пусть она имеет вид

$$\psi_{i_1}(x_1,x_2) \wedge \psi_{i_2}(x_2,x_3) \wedge \cdots \wedge \psi_{i_j}(x_j,x_{j+1}) \wedge x = x_1 \wedge y = x_{j+1}.$$

Предварим эту формулу кванторами существования следующим образом:

$$\exists x_1, \ldots, \exists x_{j+1}\left(\psi_{i_1}(x_1,x_2) \wedge \psi_{i_2}(x_2,x_3) \wedge \cdots \wedge \psi_{i_j}(x_j,x_{j+1}) \wedge x = x_1 \wedge y = x_{j+1}\right).$$

Обозначим такую формулу $\phi_{ij}(x,y)$. Заметим, что формула $\phi_{ij}(x,y)$ утверждает существование цепочки от x до y ограниченной длины. Тогда в силу вышесказанного из истинности $T^0_{x,y}\left(\Psi(x,y)\right)$ следует истинность $\bigvee\limits_{j=1}^{L}\bigvee\limits_{i=1}^{n_j}\phi_{ij}$. С другой стороны, из истинности любой из ϕ_{ij} следует истинность $T^0_{x,y}\left(\Psi(x,y)\right)$.

Шаг. Пусть для всех $i<r$ эквивалентные формулы построены, построим эквивалентную формулу для r. Рассмотрим формулу

$$\exists z_1\exists z_2\Bigg(\overbrace{\bigvee_{i+j\le r-1;i,j>0}\Big(\underbrace{\left(T^i_{x,z_1}\left(\Psi(x,z_1)\right)\right)}_{(1)}\wedge\underbrace{\left(T^j_{z_2,y}\left(\Psi(z_2,y)\right)\right)}_{(2)}\Big)}^{(3)}\wedge$$
$$\wedge\underbrace{\bigvee_{j=0}^{L-1}\left(D_L(s^j(z_1))\wedge D_L(s^j(z_2))\right)}_{(4)}\wedge\underbrace{\bigvee_{j=1}^{p}\bigvee_{i=1}^{t_j}T_{z_1,z_2}\left(\eta_{ij}(z_1,z_2)\right)}_{(5)}\Bigg).$$

Здесь $\eta_{ij}(z_1,z_2)$ устроена следующим образом. Рассмотрим всевозможные цепочки со звеньями из дизъюнкции, стоящей под исходным транзитивным замыканием, и с количеством звеньев не более p (как следствие, с суммой длин звеньев k_i, не превосходящей L'). Далее рассмотрим такие цепочки длины j и как-либо их пронумеруем, пусть таких цепочек t_j. По цепочке C_{ij} с количеством звеньев j, имеющей номер i построим формулу. Рассмотрим формулу в этой цепочке, пусть она имеет вид

$$\psi_{i_1}(x_1,x_2)\wedge\psi_{i_2}(x_2,x_3)\wedge\cdots\wedge\psi_{i_j}(x_j,x_{j+1})\wedge x=x_1\wedge y=x_{j+1}.$$

Предварим эту формулу кванторами существования следующим образом:

$$\exists x_1,\ldots,\exists x_{j+1}\left(\psi_{i_1}(x_1,x_2)\wedge\psi_{i_2}(x_2,x_3)\wedge\cdots\wedge\psi_{i_j}(x_j,x_{j+1})\wedge x=x_1\wedge y=x_{j+1}\right).$$

Обозначим такую формулу $\eta_{ij}(x,y)$. Заметим, что формула $\eta_{ij}(z_1,z_2)$ утверждает существование цепочки от z_1 до z_2 ограниченной длины. Также заметим, что после элиминации кванторов каждая из формул η_{ij} или окажется тождественно ложной, либо примет вид $x=s^{k_{ij}}(y)\wedge D_L(s^{m_{ij}}(x))$ для некоторых констант k_{ij} и m_{ij}.

Из истинности этой формулы тривиально следует истинность оператора транзитивного замыкания, так как есть путь от x, до z_1, от z_1 до z_2 и от z_2 до y, значит, есть путь и от x до y.

Покажем следование в другую сторону. Пусть истинно $T^r_{x,y}\left(\Psi(x,y)\right)$, значит, существует соответствующая цепочка, подтверждающая истинность оператора транзитивного замыкания, причем, в узлах этой цепочки есть повторяющиеся остатки от деления на L. В качестве $I(z_1)$ и $I(z_2)$ рассмотрим самую далеко отстоящую друг от друга пару-повтор, не содержащуюся в другом повторе. Они найдутся, так как в цепочке повторы есть. Заметим, что в узлах, располагающихся между $I(x)$ и $I(z_1)$ и между $I(z_2)$ и $I(y)$ выполнено следующее:

- Если некоторый узел на промежутке $[I(x),I(z_1))$ имеет некоторый остаток от деления на L, то ни один узел на промежутке $(I(z_2),I(y)]$ не имеет того же остатка. Действительно, если бы это было так, то это бы противоречило выбору $I(z_1)$ и $I(z_2)$.

- Ни один из остатков узлов на промежутке $[I(x), I(z_1))$ и на промежутке $(I(z_2), I(y)]$ не совпадает с остатками $I(z_1)$ и $I(z_2)$ по той же причине.

Таким образом, на промежутке $[I(x), I(z_1))$ и промежутке $(I(z_2), I(y)]$ в сумме меньше различных остатков, чем на всей цепочке, тогда там меньше повторов, значит, истинна формула вида (1) для некоторого значения индекса $0 < p_1 < r$ и формула вида (2) для некоторого значения индекса $0 < p_2 < r$, тогда верна формула (3).

Теперь рассмотрим часть цепочки от $I(z_1)$ до $I(z_2)$. Они имеют одинаковые остатки от деления на L, значит, во-первых, истинна формула (4), а во-вторых, L делит $|I(z_1) - I(z_2)|$, тогда и p делит $|I(z_1) - I(z_2)|$. Если часть цепочки от $I(z_1)$ до $I(z_2)$ имеет не более p звеньев, то она совпадает с цепочкой, по которой была построена одна из η_{ij}, значит, верна (5).

Если же в этой цепочке больше p звеньев, то есть повторяющиеся остатки от деления на p. Пусть повторяются остатки у a_i и у a_{i+k}. Запишем новую цепочку, до a_i она будет совпадать с прежней, а после будет та часть, что шла после a_{i+k}. Тогда получим новую цепочку, у которой остаток от деления на p у последнего узла совпадет с таким остатков у прежней цепочки, но звеньев будет меньше. Повторяя данную процедуру, ее можно будет сократить до некоторой цепочки C с количеством звеньев не более p. Заметим, что тогда расстояние между начальным и конечным узлом цепочки C будет кратно p и не будет превышать L'. Но тогда расстояние между начальным и конечным узлом цепочки C делит L. Значит, существует цепочка из $I(z_1)$ до $I(z_2)$, где в качестве звена выступает формула, построенная по C. Заметим, что формула, построенная по C, совпадет с одной из η_{ij}. Значит, истинна и формула (5).

Таким образом, мы показали, что будут истинны формулы (3), (4), (5), значит, будет истинной и их конъюнкция. □

3.3 Звенья разных знаков

Определение 10. *Рассмотрим формулу* $T_{x,y}\left(\bigvee_{i=1}^{N} x = s^{k_i}(y) \wedge D_p(s^{m_i}(x))\right)$ *Будем называть элементарную конъюнкцию вида* $x = s^{k_i}(y) \wedge D_p(s^{m_i}(x))$ *возможным звеном, а знак числа* k_i *— знаком соответствующего звена. Будем говорить, что звено с номером* i *положительно, если* $k_i > 0$*, отрицательно — если* $k_i < 0$.

Лемма 3. *Формула вида* $T_{x,y}\left(\bigvee_{i=1}^{N} x = s^{k_i}(y) \wedge D_p(s^{m_i}(x))\right)$ *при* $p > \max_i\{|k_i|\}$ *истинна тогда и только тогда, когда существует цепочка, подтверждающая ее истинность, такая, что все ее узлы находятся в промежутке* $(\min(I(x), I(y)) - h, \max(I(x), I(y)) + h)$*,* $h = p(p^2 + 1)$.

Доказательство. Если $I(x) = I(y)$, то утверждение доказано, так как существует путь нулевой длины. Рассмотрим случай, когда $I(x) < I(y)$. Пусть истинна формула $T_{x,y}\left(\bigvee_{i=1}^{N} x = s^{k_i}(y) \wedge D_p(s^{m_i}(x))\right)$, тогда существует цепочка C, подтверждающая ее истинность. Считаем, что в C нет циклов. Рассмотрим в C наименьший узел, обозначим его a_{min} . Если $a_{min} = I(x)$, то все узлы цепочки больше $I(x)$, и уж тем более больше $I(x) - (p^3 + p)$. Если же $a_{min} < I(x)$, то отложим от $I(x)$ до a_{min} непересекающиеся отрезки длины p. Пусть на $[a_{min}, I(x)]$ поместилось ровно r целых непересекающихся отрезков длины p, пронумеруем их числами от 1 до r справа налево. Заметим, что поскольку $I(x) < I(y)$, то в C найдется узел u такой, что $I(x) < u$ и номер u цепочке C больше номера a_{min} (по крайней мере, $I(y)$ удовлетворяет всем этим условиям). Поэтому цепочку от $I(x)$ до u можно разделить на две части: цепочку от $I(x)$ до a_{min} и от a_{min} до u. Обозначим эти цепочки C' и C'' соответственно. Рассмотрим узлы цепочки C', выберем из них монотонно убывающую подпоследовательность $(b_i)_{i=1}^{q_1}$, такую, что $b_1 = I(x)$, а b_{i+1} — узел с наименьшим номером такой, что он меньше b_i. Последний элемент такой подпоследовательности совпадет с a_{min}. Построим возрастающую подпоследовательность $(c_i)_{i=1}^{q_2}$ по узлам цепочки C'': $c_1 = a_{max}$, c_{i+1} — узел с наименьшим номером такой, что он больше c_i. Заметим, что последовательность (b_i) обладает следующим свойством: если $b_i < b_j$, то номер b_i в цепочке больше номера b_j. Аналогично, если $c_i > c_j$, то номер c_i в цепочке больше, чем номер c_j. В силу $p > \max\limits_i\{|k_i|\}$ в каждом из отложенных отрезков лежит хотя бы по одной точке последовательностей (b_i) и (c_i). Если число отрезков $r > p^2$, то среди них найдутся хотя бы два таких различных отрезка o_{i_1} и o_{i_2}, что выполнено следующее. Пусть узлы w_1, w_2 последовательностей (b_i) и (c_i) соответственно попали в отрезок o_{i_1}, тогда в o_{i_2} попали узлы w'_1 и w'_2 последовательностей (b_i) и (c_i) соответственно, причем $|w_1 - w'_1| = |w_2 - w'_2|$ и p делит $|w_1 - w'_1|$. Данное условие будет выполнено потому, что существует p^2 способов разместить две точки на отрезке длины p. Заметим, что в таком случае можно построить новую цепочку от $I(x)$ до u. Необходимо взять прежнюю цепочку от $I(x)$ до a_{min}, удалить из нее все звенья между w_1 и w'_1 и получить новую цепочку C_1 от $I(x)$ до новой точки a'_{min}. Это можно сделать, так как у узлов w_1 и w'_1 одинаковые остатки от деления на p. Также заметим, что $a'_{min} = a_{min} + |w_1 - w'_1|$, так что у a_{min} и a'_{min} также одинаковые остатки от деления на p. Затем необходимо взять старую цепочку от a_{min} до u и удалить из нее все звенья между w_2 и w'_2, получив цепочку C_2, что также возможно в силу рассуждений, аналогичных приведенным выше. Остается только последовательно соединить цепочки C_1 и C_2, то возможно в силу равенства остатков a_{min} и a'_{min}. Остается только заметить, что последний узел новой цепочки совпадает с u, так как длины удаленных частей совпадают. К тому же следует отметить, что точка a'_{min} сдвинулась в большую сторону хотя бы на p по сравнению с a_{min}, таким образом, количество целых отрезков длины p, помещающихся между $I(x)$ и a_{min}, уменьшилось по крайней мере на 1 по сравнению с r. Описанную процедуру необходимо повторять до тех пор, пока не окажется, что между наименьшим узлом цепочки и $I(x)$ помещается не более p^2 целых отрезков длины p. Но это и будет означать, что все узлы цепочки больше $I(x) - (p^3 + p)$. Далее, проводя аналогичные преобразования полученной цепочки, строим окончательную цепочку, где все узлы меньше в дополнение к предыдущему условию еще и меньше $I(y) + (p^3 + p)$. Для этого рассматриваем участок от $I(y)$ до максимального узла a_{max}, разбиваем его на отрезки длины p, если отрезков получилось хотя бы p^2 или более — проводим сокращение цепочки. После сокращения участка цепочки между $I(y)$и a_{max} пожет потребоваться снова сократить цепочку между $I(x)$ и a_{min} и т.д. Однако цепочка имеет конечное число узлов. Заметим, что после сокращения количество узлов в цепочке уменьшается. Таким образом, бесконечно выполнять сокращения нельзя, процесс обязательно остановится. В итоге получаем, что все узлы находятся в промежутке $(\min(I(x), I(y)) - (p^3+p), \max(I(x), I(y)) + (p^3+p))$ В случае, когда $I(x) > I(y)$, рассуждения аналогичны с той лишь разницей, что необходимо будет рассматривать участок от $I(x)$ до максимального узла цепочки и участок от минимального узла цепочки до $I(y)$. В обратную сторону следование тривиально, цепочка, обладающая дополнительными свойствами по-прежнему годится в качестве подтверждающей истинность оператора транзитивного замыкания. $\square$

Теорема 8. *Для формулы вида* $T_{x,y}\left(\bigvee_{i=1}^{N} x = s^{k_i}(y) \wedge D_p(s^{m_i}(x))\right)$ *существует эквивалентная формула, в которой каждое транзитивное замыкание имеет только звенья одного и того же знака.*

Доказательство. Сначала проведем некоторые подготовительные рассуждения, затем построим требуемую формулу. Все предикаты вида D_p можно привести к к виду D_f, где можно положить $f = 2p\max_i\{|k_i|\}$, а затем привести формулу к ДНФ. Обозначим $\Phi(x,y) \equiv \left(\bigvee_{i=1}^{N} x = s^{k_i}(y) \wedge D_f(s^{m_i}(x))\right)$. Пусть истинно рассматриваемое транзитивное замыкание, значит, существует цепочка C, подтверждающая истинность оператора транзитивного замыкания. Пусть $I(x) < I(y)$. Тогда в цепочке C найдется такой узел w, то $I(x) < w$ и среди всех узлов, больших $I(x)$, узел w имеет наименьший номер в C. Такой узел существует, ибо $I(x) < I(y)$. Заметим, что $I(x)+1 \leq w \leq I(x)+K$, где $K = \max_i\{|k_i|\}$. Тогда существует цепочка от $I(x)$ до w, причем, в силу леммы 3 ни один узел этой цепочки не выходит за границы конечного промежутка $(I(x) - (f^3+f), I(x) + K + f^3 + f)$. Тогда всякая такая цепочка без циклов будет иметь не более $2(f^3+f)+K-1$ узлов. Цепочек с таким количеством узлов со звеньями из Φ конечное число, ту цепочку, которая ведет из x в w можно найти, перебирая все такие цепочки. Заметим также, что сумма длин звеньев в этой цепочке с учетом знаков будет положительна. Если $w = I(y)$, то цепочка на этом заканчивается. Если же $w \neq I(y)$, то проводя аналогичные рассуждения, можно показать что если мы находимся в некотором узле цепочки и есть такой узел, больший исходного, но среди всех таких обладающий минимальным номером, то цепочка до него не может иметь больше $2(f^3+f)+K-1$ узлов. Таким образом можно добраться до наибольшего узла цепочки a_{max}. Если $a_{max} = I(y)$, то цепочка на этом заканчивается. Если же $a_{max} > I(y)$, то в силу леммы 3 a_{max} больше него не более чем на f^3+f-1. Значение a_{max} можно найти, перебрав конечное множество точек. Пусть $a_{max} = I(y)+d$. При этом есть цепочка от a_{max} до $I(y)$. В силу леммы 3 все узлы цепочки попадают и промежуток $(I(y) - (f^3+f), I(y)+d+(f^3+f))$, имеющий известную длину. Тогда цепочка без циклов, начинающаяся в a_{max} и заканчивающаяся в $I(y)$, не может иметь длину больше, чем количество точек на этом промежутке. Аналогичные рассуждения можно провести при условии, что $I(x) > I(y)$, только двигаться нужно будет не до наибольшего, а до наименьшего узла цепочки. Рассмотрим некоторую конечную цепочку C' без циклов, такую, что в ее формуле нет противоречащих предикатов D_f. Пусть ее первый узел a_1 удовлетворяет некоторому условию делимости $D_f(s^m(a_1))$. Вычислим сумму длин звеньев в такой цепочке с учетом знаков.

Пусть эта сумма равна K'. Построим формулу $x = s^{K'}(y) \wedge D_f(s^m(x))$. Обозначим такую формулу $\Psi_{C'}(x, y)$. Заметим, что от x до y ведет цепочка C' тогда и только тогда, когда истинна $\Psi_{C'}(x, y)$. Таким образом, можно рассматривать такие «сложные» звенья вместо рассмотрения цепочки фиксированной длины. Теперь построим формулу, эквивалентную транзитивному замыканию из формулировки теоремы. Пусть h — некоторая константа. Цепочек со звеньями из Φ, имеющих не более h узлов, имеется конечное число. Обозначим его M. Занумеруем такие цепочки каким-либо образом. Заметим, что все звенья из Φ также входят в эту нумерацию под какими-то номерами. Пусть C_i — цепочка с номером i в такой нумерации. Построим по ней формулу $\Psi_{C_i}(x, y) \equiv \big(x = s^{K_i}(y) \wedge D_f(s_i^r(x))\big)$, как описано выше. Построим такие формулы для всех цепочек. Будем обозначать $\Gamma_h(x, y)$ дизъюнкцию всех $\Psi_{C_i}(x, y)$, построенных по цепочкам без повторов узлов с количеством узлов не более h, таких, что в них $K_i > 0$, аналогично обозначим $\Delta_h(x, y)$ дизъюнкцию всех формул $\Psi_{C_i}(x, y)$, построенных по цепочкам без повторов узлов с количеством узлов не более h, таких, что в них $K_i < 0$. Тогда формула, эквивалентная исходному транзитивному замыканию, будет иметь вид

$$(x = y) \vee \Bigg[(x < y) \wedge \exists z \Bigg(T_{x,z}\Big(\Gamma_{2(f^3+f)+K-1}(x, z)\Big) \wedge$$
$$\wedge \Bigg((y = z) \vee \bigvee_{d=1}^{f^3+f-1} \Big(z = s^d(y) \wedge \Delta_{d+2(f^3+f)-1}(z, y)\Big)\Bigg)\Bigg)\Bigg] \vee$$
$$\vee \Bigg[(x > y) \wedge \exists z \Bigg(T_{x,z}\Big(\Delta_{2(f^3+f)+K-1}(x, z)\Big) \wedge$$
$$\wedge \Bigg((y = z) \vee \bigvee_{d=1}^{f^3+f-1} \Big(z = s^{-d}(y) \wedge \Gamma_{d+2(f^3+f)-1}(z, y)\Big)\Bigg)\Bigg)\Bigg].$$

Покажем эквивалентность формул. Пусть истинно исходное транзитивное замыкание. Если при этом $x = y$, то истинна и построенная нами формула. Если же $x < y$ $(x > y)$, то при помощи некоторого количества звеньев из $\Gamma_{2(f^3+f)+K-1}(x, z)$ $\big(\Delta_{2(f^3+f)+K-1}(x, z)\big)$ можно добраться до наибольшего (наименьшего) узла цепочки. Именно его рассмотрим в качестве $I(z)$. Либо $I(z) = I(y)$, либо $I(y) < I(z)$ $(I(y) > I(z))$ и отстоит от него не более, что на $f^3 + f - 1$, а после от z до y есть цепочка с количеством звеньев не более $d + 2(f^3 + f) - 1$, причем, эта цепочка такова, что суммарная длина пути по ней отрицательна (положительна). В обратную сторону следование тривиально, поскольку для любой константы h любой из членов Γ_h и Δ_h можно выразить через последовательность звеньев из Φ. Остается только заметить, что Γ_h и Δ_h содержат только звенья положительных и отрицательных знаков соответственно. □

Заключение

В данной работе рассмотрен вопрос о транзитивном замыкании формул с функцией следования и предикатами делимости. Показано, что если допускать транзитивное замыкание хотя бы по двум парам переменных, то выразимы сложение и умножение, такая теория разрешимой не является. Также показано, что для формул, положительно содержащих функцию следования и предикаты делимости, существуют эквивалентные формулы, не содержащие оператора транзитивного замыкания.

Дальнейшим направлением изучения данного вопроса может быть рассмотрение формул, содержащих помимо следования неравенства.

Список литературы

[1] Адян С.И., Дурнев В.Г. Алгоритмические проблемы для групп и полугрупп // Успехи математических наук, 55:2(332), 2000. С. 3–94.

[2] Верещагин Н.К., Шень А.М. Языки и исчисления. МЦНМО, 2002.

[3] Семенов А.Л. Логические теории одноместных функций на натуральном ряде // Изв. АН СССР, №47(3), 1983. С. 623–658.

[4] Семенов А.Л. О некоторых расширениях арифметики сложения натуральных чисел // Изв. АН СССР, №43(5), 1979. С. 1175–1195.

[5] Geogre S. Boolos, Richard C. Jefferey. Computability and logic. Cambridge University Press, 1994.

[6] Church A. A note on the Entscheidungs problem // Journal of Symbolic Logic, №1, 1936. P. 40-41.

[7] Church A. An unsolvable problem of elementary number theory // Amer. Journ. of Math., №58, 1936. P. 345-363.

[8] Fagin R. Monadic generalized spectra // Zeitschrift fur Math. Logik Grundlagen d. Math, №21, 1975. P. 89–96.

[9] Presburger M. Uber die Vollstandigkeit eines gewissen Systems der Arithmetik ganzer Zahlen, in welchem die Addition als einzige Operation hervortritt // Comptes Rendus du I congres de Mathematiciens des Pays Slaves. Warszawa, 1929. P. 92–101.

[10] Rosser J.B. Extensions of some theorems of Godel and Church // Journal of Symbolic Logic, №1, 1936. P. 87-91.

[11] Tarski A.A. Decision Method for Elementary Algebra and Geometry. Berkeley, Los Angeles, 1951.

[12] Tarski A. Arithmetical classes and types of Boolean algebras: Preliminary report. Bull. Amer. Math. Sos., №55, 1949. P. 64-64.